OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a IX – a

Problema 1. Să se arate că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $a, n \in \mathbb{N}^*$, au loc:

a) $|x+a| + |x-a^2| \geq a^2 + a$;

b) $|x+1| + |x+2| + \ldots + |x+n| + |x-1^2| + |x-2^2| + \ldots + |x-n^2| \geq \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Problema 2. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \cdot \{x\} = 1\}$. Demonstraţi că:

a) dacă $x \in A$, atunci $x^2 = [x]^2 + \{x\}^2 + 2$;

b) dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{2016} \in A$ şi $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2016}$, atunci

$$\left\{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2016}^2\right\} = \{x_1\}^2 + \{x_2\}^2 + \ldots + \{x_{2016}\}^2.$$

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex de arie $27\ m^2$ şi O intersecţia diagonalelor sale. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD, DOA sunt vârfurile unui paralelogram a cărui arie se cere.

Problema 4. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ şi $(AC) \cap (BD) = \{O\}$. Dacă $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ astfel încât punctele M, O şi N să fie coliniare, atunci:

a) exprimaţi vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{OC}$ şi $\overrightarrow{OD}$;

b) demonstraţi că $\dfrac{AB}{CD} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{NB}{CN} + \dfrac{MA}{DM}\right)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a X – a

Problema 1. Arătaţi că $\left(\dfrac{\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+...+\log_{2015} 2016}{2012}\right)^{2012}>5.$

Problema 2. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$ şi $|z_1|=|z_2|=1$. Să se arate că $|z_1-z_2|=1$.

Problema 3. Să se determine funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\ln(xy)\leq f(x)+f(y)-x-y\leq f(xy)-xy,\quad (\forall)\, x,y\in(0,\infty).$$

Problema 4. Se consideră funcţia surjectivă $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ şi funcţia strict crescătoare $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, astfel încât $f(x)\geq g(x)$, pentru fiecare $x\in\mathbb{N}$.

a) Arătaţi că $f(x)=g(x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{N}$;

b) Calculaţi $f(1)-g(2)+f(3)-g(4)+...+f(2015)-g(2016)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a XI – a

Problema 1. Să se calculeze:

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2+x+2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2x+5}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+3}\right)$.

Problema 2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. Să se calculeze A^{2016}.

Problema 3. Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\operatorname{tr} A\neq 0$ şi $\det\left(A^2+(\det A+x)\cdot I_2\right)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Arătaţi că $4\cdot\det A\geq(\operatorname{tr} A)^2$.

Problema 4. Arătaţi că nu există nicio funcţie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, astfel încât

$$f^2(x)\geq f(x+y)(f(x)+y),\qquad (\forall)\ x,y>0.$$

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5. 03. 2016

Clasa a XII – a

Problema 1. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(6x+5)+2016}\,\mathrm{d}x,\ x \in (0;\infty)$.

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ având elementul neutru e şi $x, y \in G$. Să se arate că dacă $x^2 = e$ şi $xyx = y^3$, atunci $y^8 = e$.

Problema 3. Să se arate că dacă H_1 şi H_2 sunt două subgrupuri ale unui grup $(G,\cdot)$, astfel încât $G = H_1 \cup H_2$, atunci $H_1 = G$ sau $H_2 = G$.

Problema 4. Fie $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că

$$(b-a)\cdot f'(x) \leq k,\ (\forall)\ x \in [a,b].$$

Să se arate că $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \frac{k}{2} + f(a)$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.